

Ульянцев Владимир Игоревич,  
Цыпленков Алексей Евгеньевич

## ЗАДАЧА «ЛЯМБДА-РАСТЕНИЕ»

Этой статьей мы продолжаем цикл публикаций олимпиадных задач для школьников по информатике. Решение таких задач и изучение разборов поможет Вам повысить уровень практических навыков программирования и подготовиться к олимпиадам по информатике.

В этой статье рассматривается задача «Лямбда-растение», которая предлагалась на первой интернет-олимпиаде базового уровня сезона 2011–2012 г. Интернет-олимпиады по информатике базового уровня проводятся Санкт-Петербургским национальным исследовательским университетом информационных технологий, механики и оптики. Сайт этих олимпиад находится по адресу <http://neerc.ifmo.ru/school/fo>.



### УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Недавно перед домом Пети упал метеорит. На следующее утро Петя обнаружил, что в его палисаднике выросло новое, неизвестное ему растение.

Растение состояло из большого числа шарообразных клубней, некоторые из которых были соединены стебельками. К своему удивлению, на каждом клубне растения Петя обнаружил некоторый номер. Корню растения соответствовал клубень с номером один. Петя заметил, что корень соединен только с клубнем под номером два. Кроме того было замечено, что каждый клубень с четным номером  $i$  соединен с клубнями  $i + 1$  и  $i + 2$  (рис. 1). Других соединений стебельками Петя не нашел.

Однажды ночью Петя увидел, что время от времени некоторые части растения све-

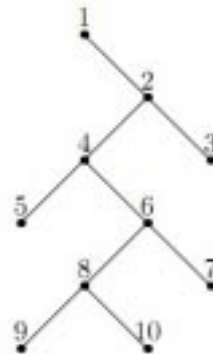


Рис. 1. Первые десять вершин растения

тятся. Исследуя закономерности свечения, Петя обнаружил, что если он дотрагивался до клубней с номерами  $u$  и  $v$ , то светиться начинал клубень с минимальным номером, находящийся на кратчайшем пути между  $u$ -м и  $v$ -м клубнями.

Петя не хочет лишний раз касаться растения и желает знать, какой клубень начал бы светиться, если бы он дотронулся до пары интересующих его клубней. Помогите Пете.

#### Формат входного файла

В первой строке входного файла содержится одно целое число  $n$  ( $1 \leq n \leq 100$ ) – число пар клубней, интересующих Петю. В следующих  $n$  строках записано по два числа  $v_i$  и  $u_i$  ( $1 \leq v_i, u_i \leq 10^9$ ;  $v_i \neq u_i$ ) – номера  $i$ -й пары клубней.

#### Формат выходного файла

В  $i$ -й строке выходного файла выведите номер клубня, который начал бы светиться, если бы Петя дотронулся до клубней  $v_i$  и  $u_i$ .

#### Примеры входных и выходных данных

lplant.in	lplant.out
4	1
1 2	2
3 4	4
5 6	8
8 10	

### РАЗБОР ЗАДАЧИ

Заметим, что описанное в условии задачи растение удобно представить в виде графа – каждому клубню сопоставим вершину с записанным на нем номером, а каждому стебельку сопоставим ребро. Покажем, что построенный граф является деревом.

Построенный граф связан, так как для любого нечетного  $i > 1$  существует ребро  $(i - 1, i)$ , а для четных  $i$  – ребро  $(i - 2, i)$ . Покажем, что построенный граф ациклический. Докажем это утверждение по индукции по числу вершин в графе  $n$ . При  $n = 2$  граф состоит из двух вершин и ребра  $(1, 2)$  и не содержит циклов. Пусть утверждение доказано для  $n = 2k$ . Добавим в граф вершины  $2k + 1$  и  $2k + 2$ . Так как вершина  $2k + 1$  соеди-

нена только с вершиной  $2k$ , то в графе не мог образоваться цикл. Аналогично, не могло появиться цикла при добавлении вершины  $2k + 2$ . Утверждение доказано для  $n = 2k + 1$  и  $n = 2k + 2$ . Таким образом, по определению дерева (приведенном, например, в книгах [1] и [2]), описанный граф является деревом.

Рассмотрим устройство кратчайшего пути из  $u$  в  $v$ . Так как построенный граф является деревом, то кратчайшим путем является единственный простой путь между  $u$  и  $v$ . Покажем, как за время  $O(1)$  найти на нем вершину с минимальным номером, если  $u \neq v$ . Если  $u = 1$  или  $v = 1$ , то искомая вершина – вершина номер один. Если вершина  $u$  нечетная, то по определению она связана только с вершиной  $u - 1$ . Следовательно, любой путь ненулевой длины, проходящий через  $u$ , пройдет через  $u - 1$ . Аналогично для вершины  $v$ . Таким образом, задачу можно свести к случаю, когда  $u$  и  $v$  четные. Так как по построению дерева предком вершины с четным номером  $i$  на пути в корень является вершина  $i - 2$ , то вершиной с наименьшим номером на пути от  $u$  до  $v$  является вершина с номером  $\min(u, v)$ .

Приведем пример решения при  $u = 5$ ,  $v = 10$  (см. рис. 2). Вершина  $u$  нечетная, перейдем от нее к  $u - 1$ . Кратчайший путь из  $u - 1$  в  $v$  состоит из вершин с номерами 4, 6, 8, 10. Минимальной является вершина с номером 4.

Приведем реализацию описанного решения на языке Pascal (см. листинг 1).

Время работы этого решения составляет  $O(n)$ .

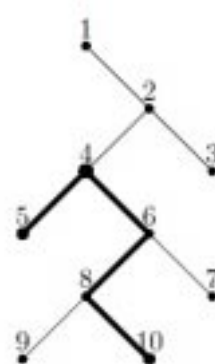


Рис.2. Пример светящегося клубня

**Листинг 1.** Реализация алгоритма

```
uses
  Math;
var
  u, v, i, n : longint;
begin
  reset(input, 'lplant.in');
  rewrite(output, 'lplant.out');
  read(n);
  for i := 1 to n do begin
    read(u, v);
    if (u = 1) or (v = 1) then
      writeln(1)
    else begin
      u := u - u mod 2;
      v := v - v mod 2;
      writeln(min(u, v));
    end;
  end;
end.
```

**Литература**

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы. Построение и анализ. М.: Вильямс, 2007. 1296 с.
2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.

**Члены жюри Интернет-олимпиад по информатике базового уровня:**

**Ульянцев Владимир Игоревич,**  
студент пятого курса кафедры  
«Компьютерные технологии» (КТ)  
НИУ ИТМО, член жюри ВКОШП,

**Цыпленков Алексей Евгеньевич,**  
аспирант кафедры КТ НИУ ИТМО.



Наши авторы, 2011.  
Our authors, 2011.