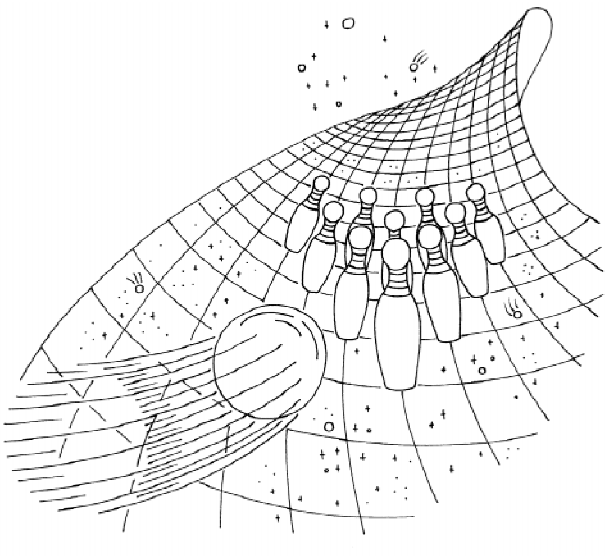
Гуровиц Владимир Михайлович
Кротков Павел Андреевич
Станкевич Андрей Сергеевич
Ульянцев Владимир Игоревич

ЗАДАЧА «КОСМИЧЕСКИЙ КЕГЕЛЬБАН»

Этой статьей мы продолжаем цикл публикаций олимпиадных задач для школьников по информатике. Решение таких задач и изучение разборов поможет Вам повысить уровень практических навыков программирования и подготовиться к олимпиадам по информатике.

В этой статье рассматривается задача «Космический кегельбан», которая предлагалась на региональном этапе Всероссийской олимпиады школьников по информатике в 2011/2012 учебном году. Материалы этой олимпиады можно найти на сайте http://neerc.ifmo.ru/school/spb/.



УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим игру «Космический кегельбан», поле для которой представляет собой бесконечную плоскость, на которой расставлены кегли. Каждая кегля представляет собой высокий цилиндр с основанием в виде круга радиусом *r* метров. Все кегли одинаковые и расставлены по следующим правилам. Кегли образуют *n* рядов, в первом ряду стоит одна кегля, во втором – две и так далее. В последнем ряду стоит *n* кеглей.

Введем на плоскости систему координат с единицей измерения, равной одному километру. Центр единственной кегли в пер-

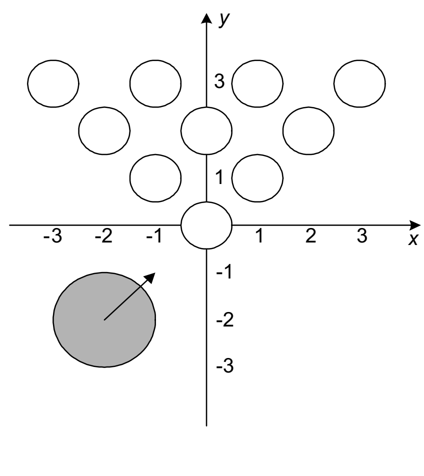


Рис. 1

вом ряду находится в точке (0, 0), во втором ряду центры кегель находятся в точках (– 1, 1) и (1, 1) и так далее. Так, центры кеглей в i-м ряду находятся в точках с координатами $(-(i-1), i-1)$, $(-(i-3), i-1)$, …, $(i-1, i-1)$.

В игре используется шар радиуса q метров. Игрок выбирает начальное положение центра шара (x_c, y_c) и вектор направления движения шара (v_x, v_y). После этого шар помещается в начальную точку и двигается, не останавливаясь, в направлении вектора (v_x, v_y). Считается, что шар сбил кеглю, если в процессе движения шара имеет место ситуация, когда у шара и кегли есть общая точка. Сбитые кегли не меняют направления движения шара и не сбивают соседние кегли при падении.

На рис. 1 приведен пример расположения кеглей и шара при $r = 500$, $n = 4$, $q = 1000$, $x_c = -2$, $y_c = -2$, $v_x = 1$, $v_y = 1$.

Требуется написать программу, которая по заданным радиусу кегли r, количеству рядов кеглей n, радиусу шара q, его начальному положению (x_c, y_c) и вектору направления движения (v_x, v_y) определяет количество кеглей, сбитых шаром.

<u>Формат входного файла</u>

Первая строка входного файла содержит два целых числа: r и n, разделенных ровно одним пробелом $(1 \le r \le 700, 1 \le n \le 200000)$ – радиус одной кегли в метрах и количество рядов кегель, соответственно.

Вторая строка входного файла содержит целое число q $(1 \le q \le 10^9)$ – радиус шара в метрах.

Третья строка входного файла содержит два целых числа x_c и y_c, разделенных ровно одним пробелом $(10^{-6} \le x_c \le 10^6, 10^{-6} \le y_c, 1000 \times y_c < -(r+q))$ – координаты центра шара в километрах.

Четвертая строка входного файла содержит два целых числа v_x и v_y, разделенных ровно одним пробелом $(10^{-6} \le v_x \le 10^6, 0 \le v_y \le 10^6)$ – координаты вектора скорости шара в километрах.

<u>Формат выходного файла</u>

Выходной файл должен содержать одно целое число – количество сбитых кеглей.

Примеры входных и выходных данных

spacepin.in	spacepin.out
500 4 1000 -2 -2 1 1	7

Пояснение к примеру. На рис. 2 изображено, какие кегли будут сбиты (такие кегли обозначены значком «×»).

РАЗБОР ЗАДАЧИ

Переформулируем задачу на геометрическом языке. Дано несколько кругов радиуса r (кегли) и полоса ширины $2q$ (траектория шара). Требуется подсчитать, сколько окружностей имеют хотя бы одну общую точку с полосой.

Заменим окружности на точки, а полосу ширины $2q$ на полосу ширины $2(q + r)$. Тогда задача сведется к эквивалентной: сколько точек (центров кеглей) лежат в расширенной полосе, то есть находятся на расстоянии не более $(q + r)$ от прямой, по которой движется центр шара. Заметим, что, поскольку по условию задачи каждая точка шара лежит изначально ниже любой точки каждой кегли, можно рассматривать не часть полосы выше шара, а всю полосу: на ответ это не повлияет.

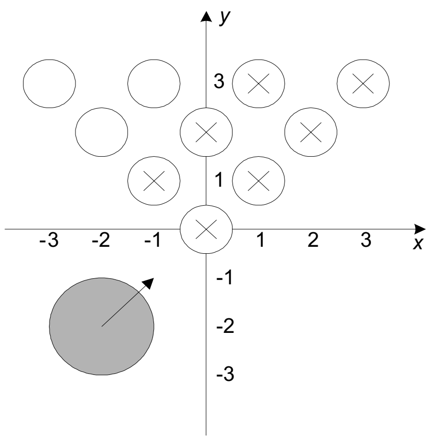


Рис.2

Листинг 1. Фрагмент решения, рассматривающего каждую кеглю

```
answer := 0;
len := sqrt(vx * vx + vy * vy);
for yp := 0 to (n - 1) do begin
  xp := -yp;
  while (xp <= yp) do begin
    vec_mul = (xp - xc) * vy - (yp - yc) * vx;
    if abs(vec_mul) / len < q + r then
      answer := answer + 1;
    xp := xp + 2;
  end;
end;
```

Запишем неравенством условие принадлежности точки полосе. Обозначим точкой C начальное положение центра шара, вектором CB его скорость (v_x, v_y), а точкой P – центр некоторой кегли.

Тогда расстояние от точки P до прямой CB равно

$$dist(P, CB) = \frac{|[CP, CB]|}{|CB|},$$

где квадратными скобками обозначено псевдоскалярное произведение векторов [1], а условие принадлежности точки полосе запишется так:

$$\frac{|[CP, CB]|}{|CB|} \le q + r.$$

Проверим отдельно принадлежность центра $P(x_p, y_p)$ некоторой кегли нашей полосе. Для этого запишем полученное выше неравенство в координатах:

$$\frac{|(x_p - x_c)v_y - (y_p - y_c)v_x|}{\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}} \le q + r.$$

Теперь можно перебрать все кегли и для каждой проверить, выполняется ли это неравенство. Приведем фрагмент решения на языке Pascal, выполняющий эту проверку (см. листинг 1).

Асимптотическое время работы такого решения равно $O(n^2)$, так как всего кегель $\frac{n(n+1)}{2}$. Такое решение не укладывается в ограничения по времени работы персонального компьютера при указанном ограничении на n.

Приведем решение с меньшим асимптотическим временем работы. Заметим, что для каждого горизонтального ряда кеглей достаточно найти самую левую и самую правую кеглю, которые собьет шар. Для этого решим неравенство

$$((x_p - x_c)v_y - (y_p - y_c)v_x)^2 \le (v_x^2 + v_y^2)(q + r)$$

относительно x_p для каждого значения y_p – ординаты рассматриваемого ряда кегель. Данное неравенство является квадратичным, и его решением является отрезок с концами $l = k(y_p - y) - c + x$, $r = k(y_p - y) + c + x$,

где $k = \frac{v_x}{v_y}$, $c = \frac{(q + r)\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_y}$.

Теперь нам необходимо найти абсциссы центров самой левой и самой правой кегли, находящихся внутри этого отрезка, – *left* и *right*. Способ вычисления этих значений приведен в листинге 2. Теперь количество сбитых кегель в горизонтальном ряду равно $\max\left(\frac{right - left}{2} + 1, 0\right)$. Взятие максимума необходимо, так как в процессе вычисления и может оказаться, что $right < left$. В этом случае шар не сбивает ни одной кегли в данном ряду.

Приведем соответствующий фрагмент программы на языке Pascal (см. листинг 2).

Листинг 2. Фрагмент корректного решения задачи

```
k := vx / vy;
c := (q + r) / 1000 * sqrt(vx * vx + vy * vy) / vy;
for yp := 0 to n - 1 do begin
  l := k * (yp - y) - c + x;
  r := k * (yp - y) + c + x;

  left := ceil(l);
  right := floor(r);

  if (abs(left) mod 2 <> yp mod 2) then
    inc(left);
  if (abs(right) mod 2 <> yp mod 2) then
    dec(right);

  left:= max(left, -yp);
  right:= min(right, yp);

  answer := answer + max(0, (right - left) div 2 + 1);
end;
```

Литература

1. *Андреева Е.В., Егоров Ю.Е.* Вычислительная геометрия на плоскости / Информатика, 2002. № 39. С. 26–29.

Гуровиц Владимир Михайлович,
учитель информатики Московской ФМШ № 2007, методист Лаборатории дистанционных технологий работы с одаренными детьми МИОО, член жюри ВКОШП,

Кротков Павел Андреевич,
студент второго курса кафедры «Компьютерные технологии» НИУ ИТМО, член жюри Интернет-олимпиад по информатике,

Станкевич Андрей Сергеевич,
кандидат технических наук, доцент кафедры «Компьютерные технологии» НИУ ИТМО, председатель научного комитета Всероссийской олимпиады школьников по информатике, председатель жюри ВКОШП,

Ульянцев Владимир Игоревич,
студент пятого курса кафедры «Компьютерные технологии» НИУ ИТМО, член жюри Интернет-олимпиад по информатике, член жюри ВКОШП.